ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АЛГОРИТМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЭВОЛЮЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЬНОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ

А.А. Хомченко, Н.П. Гришина, К. Лукас, С.П. Сидоров

В настоящей работе рассматривается метаэвристический подход с использованием алгоритма дифференциальной эволюции для нахождения эффективной границы при решении задачи портфельной оптимизации для инвестора с невогнутой функцией полезности, отражающей несимметричное отношение инвестора к потерям и убыткам.

ВВЕДЕНИЕ

Задача оптимального портфельного инвестирования может быть сформулирована как задача нахождения

$$x \in D := \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\, x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n \right\}, \tag{1}$$

максимизирующего математическое ожидание значения функции полезности:

$$\int_{r \in \mathrm{R}} u(r(x))dP(x) \to \max_{x \in D},$$

$r(x)$ есть доходность портфеля x, $P(x)$ есть распределение доходности портфеля x.

Обычно предполагается, что предпочтения инвесторов описываются квадратичной или степенной функцией полезности u, а доходности активов – нормальным распределением. Но так как, ни характеристики распределений доходностей активов, ни предпочтения лиц, принимающих решения, не соответствуют предположениям классической теории Марковица, то возникают разногласия по поводу того, что такое оптимальное решение. Теория поведенческих финансов приблизилась к определению более реалистичной модели предпочтения и выбора, и это неизбежно приводит к добавлению новых ограничений и рассмотрению задач невыпуклой оптимизации.

Примером такого подхода является теория перспектив Канемана и Тверски [1]. Их статья [1] содержит ряд примеров и демонстраций, показывающих, что в условиях лабораторных экспериментов инвесторы и игроки систематически нарушают предсказания теории ожидаемой полезности. Более того, они предложили новую теорию – теорию перспектив, которая смогла объяснить поведение людей при принятии решений в условиях риска в тех экспериментах, в которых традиционная теория ожидаемой полезности потерпела неудачу. Они обнаружили, что при принятии инвестиционных решений инвесторы асимметрично относятся к потерям и выигрышам, а именно переоценивают либо вероятность, либо величину потерь.

Учет поведенческих аспектов отношения инвестора к потерям приводит к рассмотрению задачи

$$\int_{r \in \mathrm{R}} u_{PT}(r(x))dw(P(x)) \to \max_{x \in D}, \tag{2}$$

где w есть некоторая весовая функция, трансформирующая исходное распределение вероятностей, и

$$u_{PT}(r) = \begin{cases} (r - r_0)^{\alpha}, r \geq r_0 \\ \lambda(r_0 - r)^{\beta}, r < r_0 \end{cases} \tag{3}$$

r_0, есть заданный уровень доходности, α, β, λ есть положительные константы, характеризующие отношение инвестора к потерям.

Отметим, что задача (2), (3) не является выпуклой, а функция u_{PT} не дифференцируема в точке r_0. Более того, если ввести ограничение на число активов в портфеле, задача будет иметь неполиномиальную сложность и стандартные методы нелинейной оптимизации не могут гарантировать нахождения ее решения за приемлемое время.

1. АЛГОРИТМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЭВОЛЮЦИИ

В данном разделе представлено описание алгоритма дифференциальной эволюции, предназначенного для решения задачи (2) с ограничением на доходность портфеля. Обозначим n – количество активов в портфеле, x_i – доля i-го актива в портфеле, T – количество временных промежутков, r_{ti} – доходность актива i в момент t, p_t – вероятность сценария t. Задача, которую мы рассматриваем, состоит в нахождении $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{R}^n$, максимизирующего

$$G(x) := \sum_{t=1}^{T} \pi_t u_{PT}\left(\sum_{i=1}^{n} r_{ti} x_i\right) \to \max \tag{4}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \\ \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n} r_{ti} x_i = d, \\ x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{5}$$

Числа π_t рассчитываются на основе значений p_t как это описано в [2].

Недавнее дополнение к классу эволюционный эвристики является метод дифференциальной эволюции предложенный Р. Сторном и К. Прайсом [3, 4]. В нашей работе мы используем алгоритм дифференциальной эволюции для решения задачи (4), (5). Дифференциальная эволюция основана на эволюционном принципе и природном развитии поколений. В ходе дифференциальной эволюции создаются поколения из решений, которые постоянно модифицируются в соответствии с эволюционными принципами, при этом с ростом числа поколений решения сходятся в некоторую точку пространства решений, которая является глобальным оптимумом.

По историческим данным, на базе которых выполняется алгоритм, вычисляются наибольшее и наименьшее возможные значения ожидаемой доходности. Полученный отрезок разбивается на S равных промежутков $[Er_k, Er_{k+1}]$, $k = 1, \ldots, S$.

На каждом из отрезков $[Er_k, Er_{k+1}]$, $k = 1, \ldots, S$, поиск производится следующим образом: создается популяция P из векторов v_i, $i = 1, \ldots, N$, где N – количество особей в исходной популяции. Под векторами $v_i \in D$, понимаются точки n-мерного пространства, в котором определена целевая функция $G(x)$, которую требуется максимизировать. На каждой итерации алгоритм генерирует новое поколение векторов (популяцию) случайным образом, комбинируя векторы из предыдущего поколения. Для каждого вектора v_i из предыдущего поколения выбираются три различных случайных вектора v_a, v_b, v_c среди векторов предыдущего поколения, не совпадающих с v_i, и генерируется вектор $\tilde{v}_i$ следующим образом:

$$\tilde{v}_{i,j} = v_{a,j} + (F + z_1)(v_{b,j} - v_{c,j} + z_2),$$

где $\tilde{v}_{i,j}, v_{a,j}, v_{b,j}, v_{c,j}$ есть j-тые компоненты векторов $\tilde{v}_i, v_a, v_b, v_c$ соответственно, F – положительная действительная константа из интервала [0, 2], управляющая усилением влияния разности $(v_{b,j} - v_{c,j} + z_2)$ на результирующий вектор, z_1 и z_2 или равны нулю с малыми вероятностями (например, 0,0001 и 0,0002 соответственно), или являются нормально распределенными случайными величинами с математическим ожиданием, равным нулю, и малым стандартным отклонением (например, 0,02). Параметры z_1 и z_2 есть необязательные параметры алгоритма дифференциальной эволюции, они необходимы для внесения «шума» в вычисление результирующего вектора, что помогает избегать попадание в локальные экстремумы.

Для выполнения оценки $\tilde{v}_i$ и v_i преобразуем их в $\tilde{x}_i$ и x_i соответственно следующим образом: все отрицательные значения исходных векторов заменяем на ноль, а каждый положительный элемент делим на сумму элементов. Таким образом, условие (1) будет выполнено. Вектор $\tilde{v}_i$ заменяет v_i и переходит в новое поколение, если выполняются следующие условия:

$$G(\tilde{x}_i) > G(x_i); G(\tilde{x}_i) \in [Er_k, Er_{k+1}].$$

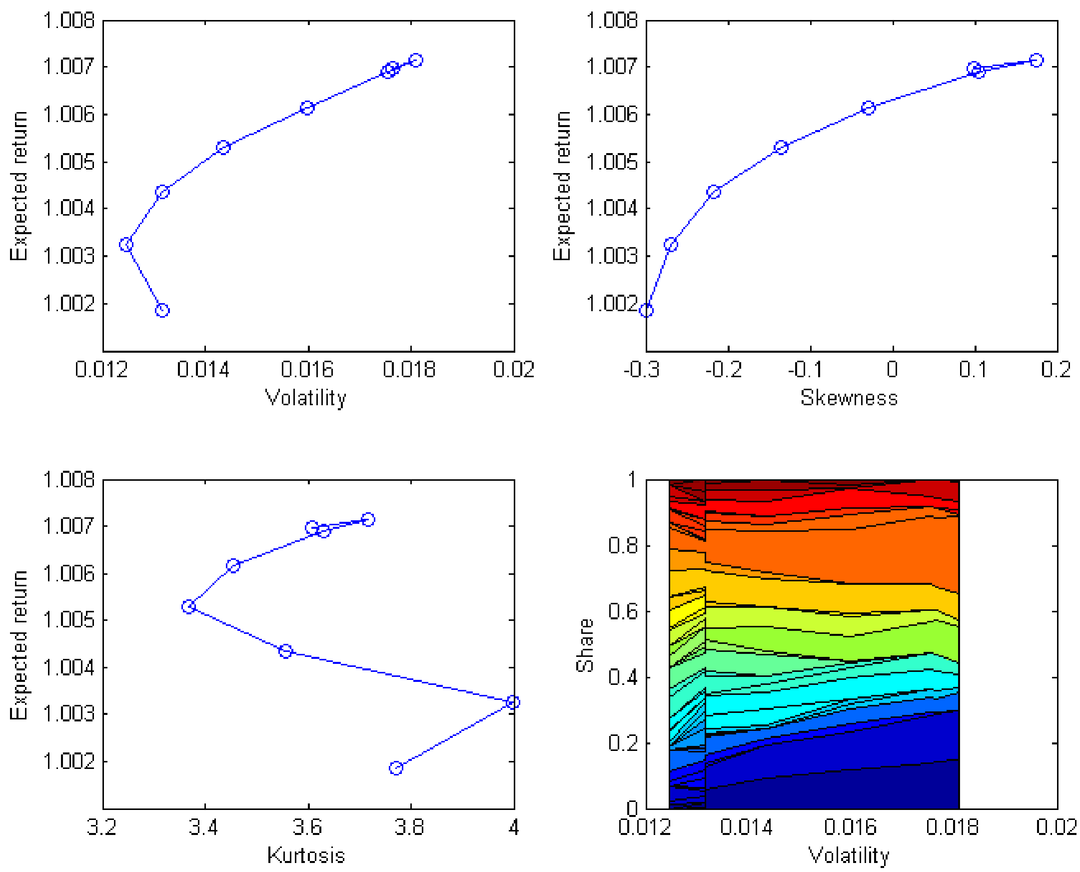
Описанные выше стадии метода дифференциальной эволюции повторяются по достижению заданного числа итераций K. Получившаяся в результате популяция содержит векторы, из которых необходимо выбрать «лучший», то есть с наибольшим значением целевой функции, вектор v_i, и соответствующий ему искомый вектор долей активов в портфеле, для которого будет достигаться максимум целевой функции.

Псевдокод алгоритма максимизации функции полезности с помощью алгоритма дифференциальной эволюции приведен ниже.

Инициализация популяции *P* из векторов $v_i, i = 1,...,N$;
цикл из *K* итераций
    для каждого v_i, $i = 1,...,N$ из матрицы *P*
        выбираем 3 случайных вектора $v_a, v_b, v_c \neq v_i$
        для каждого элемента *j* вектора v_i
            с вероятностью $\pi_1 : z_1[j] \leftarrow N(0, \sigma_1)$, иначе $z_1[j]$ = 0
            с вероятностью $\pi_2 : z_2[j] \leftarrow N(0, \sigma_2)$ иначе $z_2[j]$ = 0
            $\mathrm{u[j]} \leftarrow \mathrm{U}(0,1)$
            если $\mathrm{u[j]} < \pi$
                то $\tilde{v}_i[j] \leftarrow v_i[j]$
                иначе $\tilde{v}_i[j] = v_a[j] + (F + z_1[j])(v_b[j] - v_c[j] + z_2[j])$
    для каждой строки $\tilde{v}_p$, *p* = $1,...,N$ новой матрицы $\tilde{P}$
    производим нормализацию $\tilde{v}_p \rightarrow \tilde{x}_p$, $v_p \rightarrow x_p$
        если $G(\tilde{x}_p) > G(x_p)$ и $\tilde{v}_p$ удовлетворяет критериям отбора
            то производим замену v_p на $\tilde{v}_p$ в матрице P
в полученной в результате отбора матрице P ищется строка, для которой
удовлетворяются критерии отбора и $E_{\max} = \max(E(U(x_p)))$

2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В вычислительном эксперименте использовались реальные данные об акциях 86 компаний за 291 промежуток времени, для расчета эффективных портфелей применялся пакет прикладных программ Matlab. Численность популяции была установлена равной $N = 80$, а число итераций алгоритма – $K = 1500$, число разбиений отрезка $S = 30$. Для улучшения производительности алгоритма, если на некотором отрезке $[Er_k, Er_{k+1}]$ за 750 итераций не происходит изменения поколения, то итерации прекращаются, и происходит финальная оценка. Рисунок визуализирует различные характеристики эффективных (с точки зрения теории перспектив) портфелей, с коэффициентом неприятия потерь $\lambda = 3$, ожидаемым уровнем доходности инвестора $w_0 = 1.004$.



Эффективные портфели с точки зрения теории перспектив ($\lambda = 3, w_0 = 1.004$)

В заключение отметим, что эвристические финансовые методы становятся все более популярными по сравнению с альтернативными традиционными методами оптимизации. Наличие недетерминированных элементов дает возможность легче преодолевать локальные минимумы. Кроме того перезапуск алгоритма не обязательно приводит к одному и тому же результату, если поиск сходится к локальному оптимуму в первый раз, то при другом запуске может определиться другой оптимум – в идеале глобальный. Все эти качества дают возможность использовать эвристические методы для широкого класса задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 13-01-00175).

Библиографический список

1. *Kahneman D., Tversky A.* Prospect theory: An analysis of decision under risk// Econometrica. 1979. V. 47. P. 263-291.

2. *Tversky, A., Kahneman, D.* Advances in prospect theory: cumulative representation of uncertainty// Journal of Risk and Uncertainty. 1992. V. 5 (4). P. 297-323.

3. *Storn R., Price K.* Differential Evolution - A simple and efficient adaptive scheme or global optimization over continuous spaces// Journal of Global Optimization. 1997, V. 11. P. 341--359.

4. *Price K., Storn R.M., Lampinen J.A.* Differential Evolution: A Practical Approach to Global Optimization. Berlin: Springer, 2005.